Métodos AiBi e Logístico para projeção de pequenas áreas: uma aplicação para a microrregião de Angicos – RN

Cristiane Silva Corrêa – CEDEPLAR/UFMG e UFRN
Luana Junqueira Dias Myrrha – CEDEPLAR/UFMG e UFRN
Moema Fígoli – CEDEPLAR/UFMG

1. Introdução

A projeção de populações municipais e de outras populações de pequenas áreas é de grande importância para a implementação, acompanhamento e avaliação de políticas públicas (WALDVOGEL, 1998). Contudo, há poucos estudos acerca dos métodos empregados para tais estimações.

Há dois grupos de métodos comumente usados: o dos métodos em que primeiro se projeta a população da área maior para depois distribuí-la nas populações das áreas menores, e o dos métodos em que faz-se o contrário, projetando primeiro as áreas menores de forma que a soma das populações das áreas menores seja equivalente á população da área maior (WALDVOGEL, 1998).

O objetivo do presente estudo é discutir o método da tendência de crescimento AiBi e o método logístico da participação da população da subárea na população regional, dois importantes métodos do primeiro grupo. Serão apresentados os detalhes de ambos os métodos e os passos necessários à suas aplicações. A idéia dos métodos é projetar a participação relativa das áreas menores na área maior (proporção) para o momento desejado de forma que, conhecendo a população da área maior para esse momento, seja possível estimar a população das áreas menores multiplicando-se a proporção encontrada pela população da área maior no ano de interesse. Em outras palavras, ambos os métodos ajustam uma função matemática às proporções existentes entre as populações das áreas menores e a população da área maior (WALDVOGEL, 1998).

Uma grande vantagem de ambos os métodos é que, ao assumir que o crescimento da população da área menor é proporcional ao da área maior, eles garantem que a soma das populações das áreas menores é igual à população da área maior, não necessitando qualquer outro ajuste para compatibilização desses valores (FRIAS, 1987). Para ilustrar a aplicação dos métodos, utilizou-se a população da microrregião de Angicos, no Rio Grande do Norte, como a área maior e os 8 municípios que a compõem como as pequenas áreas.

2. Método de Tendência de Crescimento ou AiBi

Considere uma área maior cuja população estimada em um momento t é P(t). Subdivide-se essa área maior em n áreas menores, de forma que a população da área maior, em um tempo t, seja igual à soma das populações das áreas menores no mesmo tempo t (FRIAS, 1987).

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(t) \qquad (1)$$

em que Pi(t) é a população de uma determinada área menor i, no tempo t.

Assumindo que, durante um período curto de tempo, a população de cada área menor varia linearmente com a população da área maior, tem-se que (FRIAS, 1987):

$$P_i(t) = a_i P(t) + b_i \qquad (2)$$

tal que:

- a_i: o coeficiente de proporcionalidade do incremento da população da área menor i em relação ao incremento da população da área maior;
- b_i: o coeficiente linear de correção.

Em outras palavras, a população da área menor pode ser estimada por uma função linear da população da área maior, em que Pi(t) é a variável dependente e P(t) é a variável explicativa ou independente. Por essa relação, cada população da área menor i no tempo t é uma proporção a_i da população da área maior corrigida por um fator de correção b_i.

Para a determinação dos coeficientes a_i e b_i é necessário conhecer o tamanho das populações das áreas menores e da área maior em dois pontos do tempo. Pode-se utilizar, por exemplo, a população recenseada em dois censos (FRIAS, 1987). Sejam t_0 e

t_1, respectivamente, as datas dos dois Censos, ao substituir-se t_0 e t_1 na equação acima, tem-se que

$$\begin{aligned} P_i(t_0) &= a_i P(t_0) + b_i \\ P_i(t_1) &= a_i P(t_1) + b_i \end{aligned}.$$

A partir da resolução desse sistema linear, tem-se que:

$$a_i = \frac{P_i(t_1) - P_i(t_0)}{P(t_1) - P(t_0)} \qquad (3)$$

$$b_i = P_i(t_0) - a_i P(t_0) \qquad (4)$$

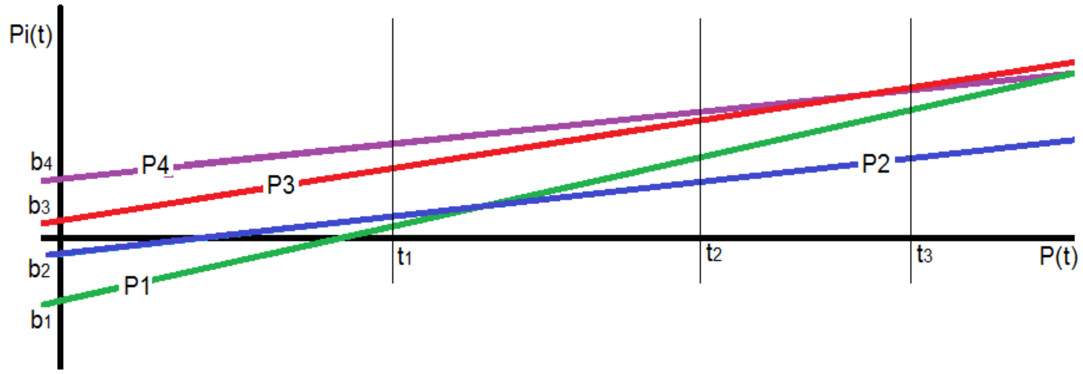
Conhecendo os coeficientes dessa equação e a população da área maior para o ano de interesse pode-se estimar a população das áreas menores no momento do tempo desejado utilizando a equação 2.

2.1. Interpretação dos Coeficientes:

A população da área maior pode crescer (ou decrescer). Cada área menor é responsável por uma parcela desse crescimento (ou decrescimento), uma vez que a soma dos crescimentos de todas as áreas menores deve ser igual ao crescimento da área maior. O coeficiente a_i informa o percentual do crescimento da área maior pelo qual o crescimento da área menor foi responsável. Ou seja, a_i indica quanto a população da área menor cresceu em relação ao crescimento da população da área maior.

Valores maiores de a_i indicam que o crescimento daquela área menor é responsável por grande parte do crescimento da área maior, e que aquela área menor cresce mais rapidamente que as demais áreas menores. Um exemplo disso pode ser observado na Figura 1. A Figura 1 exemplifica o método AiBi e as relações entre os tamanhos populacionais e seus coeficientes considerando 4 áreas menores hipotéticas que apresentam crescimento populacional no período. Observamos que a inclinação da reta (a_i) da população P3 é menor que a inclinação da reta de P1, indicando que a população P1 cresce mais rapidamente que a população P3 e que seu crescimento teve maior impacto no crescimento de P(t) que a população P3.

Figura 1 – Relação entre P(t) e Pi(t).



Em relação ao coeficiente a_i é importante considerar ainda que a soma dos crescimentos das áreas menores deve ser igual ao crescimento da área maior. Assim, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(t_1) - P_i(t_0)}{P(t_1) - P(t_0)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta P_i(t_1, t_0)}{\Delta P(t_1, t_0)} = \frac{1}{\Delta P(t_1, t_0)} \sum_{i=1}^{n} \Delta P_i(t_1, t_0) = \frac{1}{\Delta P(t_1, t_0)} \Delta P(t_1, t_0) = 1,$$

em que $\Delta P_i(t_1, t_0)\ e\ \Delta P(t_1, t_0)$ representam a variação do tamanho da população da área i e a variação do tamanho da população da are maior, entre t_1 e t_0, respectivamente.

Ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \qquad (5).$$

Esse resultado evidencia que para satisfazer a condição de que a soma das participações relativas dos crescimentos das áreas menores em relação à maior é igual ao crescimento total da área maior, necessariamente a soma de todos os coeficientes a_i deve ser igual a 1.

Uma limitação do método AiBi é que ele não é consistente quando o crescimento populacional da área maior e o das áreas menores apresentam direções opostas, ou seja, quando a área maior cresce enquanto alguma área menor decresce ou vice versa. Aparentemente, valores negativos e positivos para a_i variando de acordo com o crescimento populacional poderiam ajustar o crescimento populacional ao seu sentido inicialmente observado. Entretanto, se o sentido do crescimento da população da área maior, projetada por algum outro método de projeção, mudar, o sentido de crescimento de todas as demais populações também será alterado, contrariando o pressuposto inicial do método de que o sentido de crescimento inicialmente observado se mantém. Tal limitação, além de contrariar as relações encontradas em populações reais, pode gerar populações negativas. Assim, se ocorrer de uma ou mais populações da área menor crescer enquanto a população da área maior decrescer, ou vice versa, o método AiBi deve ser aplicado com alguns cuidados. Uma forma de contornar essa restrição do método é dividir a área maior em dois subgrupos: um composto pelas áreas menores que crescem em população e outro composto pelas áreas menores que diminuem em população. Depois disso, o método deve ser aplicado separadamente para cada um desses subgrupos.

Nessas condições, pelo método AiBi, assume-se que, se a área maior cresce, todas as áreas menores também crescerão, mesmo que em intensidades diferentes. Da mesma forma, se a área maior diminui, todas as áreas menores também diminuirão. Ou seja, Pelo método AiBi o valor de a_i dado por $a_i = \dfrac{P_i(t_1) - P_i(t_0)}{P(t_1) - P(t_0)}$ deve sempre ser positivo.

Se $a_i > 0$ e $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, então a_i deve sempre satisfazer a condição

$$0 < a_i < 1 \qquad (6).$$

Esses resultados evidenciam que a população das áreas menores não cresce indefinidamente, mas crescem relativamente à área maior, e a soma dos crescimentos das áreas menores deve ser igual ao crescimento da área maior.

Duas populações podem ter crescido o mesmo tanto em termos absolutos (apresentando o mesmo a_i), mas apresentarem tamanhos populacionais diferentes no início e no final do período em análise. O coeficiente b_i é responsável pela correção do tamanho da população da área menor por seu tamanho no momento inicial. Como exemplo, observamos a Figura 1. As populações P2 e P4 apresentam o mesmo a_i, (mesma inclinação), mas partiram de valores de b_i diferentes, o que resulta em populações Pi(t) diferentes. É importante lembrar que o valor de b_i não é o tamanho da população em um momento inicial, mas um fator de correção que adéqua o tamanho da população a cada tempo t ao seu tamanho inicial.

Lembramos, ainda, que o método assume que a relação entre os tamanhos das populações das áreas menores e a população da área maior é linear apenas no período de tempo de interesse do estudo. Para períodos pequenos de tempo, tal relação é aceitável. Contudo, o método não faz nenhuma consideração sobre como foi o crescimento populacional em períodos anteriores ou como será esse crescimento em períodos posteriores ao analisado. Por não fazer nenhuma menção à relação de crescimento entre as populações em períodos anteriores é possível, pelo método AiBi, que se obtenha valores negativos para b_i. Um valor negativo de b_i não significa que em um período passado aquela população teve tamanho 0 ou negativo, pois b_i é apenas um fator de correção para ajustar a função ao tamanho populacional observado durante o período de interesse. Na Figura 1 tal situação é ilustrada na população P1. Embora tenha um valor negativo de b_i, tal população é positiva entre t=0 e t=1, que correspondem ao intervalo de tempo de interesse, dentro do qual o tamanho da população é modelado pelo método AiBi.

Uma prova dos valores possíveis de b_i parte da equação 1, segundo a qual

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(t)$$

Dessa equação tem-se que

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i P(t) + b_i\right)$$

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i P(t) + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$P(t) = P(t)\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$P(t) = P(t) \cdot 1 + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$$

Se $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$, então b_i necessariamente deve assumir valores positivos e negativos para cada conjunto de populações investigado.

Considerando que a_i só pode assumir valores entre 0 e 1, precisamos definir quais são os valores possíveis para b_i.

Pela equação 4 tem-se que

$$P_i(t) = a_i P(t) + b_i \Rightarrow b_i = P_i(t) - a_i P(t)$$

Se a_i tende a 0,

$$\lim_{a_i \to 0} b_i = \lim_{a_i \to 0} P_i(t) - a_i P(t) = P_i(t).$$

Como $P_i(t)$ representa um tamanho de população, $P_i(t)$ é um valor positivo.

Se a_i tende a 1,

$$\lim_{a_i \to 1} b_i = \lim_{a_i \to 1} P_i(t) - a_i P(t) = P_i(t) - P(t)$$

Como $P_i(t) < P(t)$, já que $P_i(t)$ é um subconjunto da população total da área maior $P(t)$, o valor de $P_i(t) - P(t)$ é negativo.

Assim, as condições que b_i deve assumir são:

$$P_i(t) - P(t) < b_i < P_i(t) \text{ e } \sum_{i=1}^{n} bi = 0 \qquad (7)$$

2.2. Aplicação do método

Dados os detalhes do método AiBi, estimou-se as populações dos 8 municípios - Afonso Bezerra, Angicos, Caiçara do Rio do Vento, Fernando Pedroza, Jardim de Angicos, Lajes, Pedra Preta, Pedro Avelino - que compõem a microrregião de Angicos, RN, considerando como área maior a população total dessa microrregião. O objetivo desta seção é estimar a população dos 8 municípios para 2010 por meio do método AiBi utilizando a população total da microrregião de Angicos projetada pela taxa de crescimento exponencial para o ano de 2010.

Dados iniciais

Para a aplicação do método AiBi são necessárias as populações das áreas menores em dois momentos do tempo e da população da área maior no período de interesse. A Tabela 1 apresenta a população observada da microrregião por municípios para os três momentos do tempo.

Tabela 1 - População observada por município, microrregião Angicos – RN, 1991, 2000 e 2010.

Município	Total, 1991	Total, 2000	Total, 2010
Afonso Bezerra	10733	10867	10844
Angicos	11535	11626	11549
Caiçara do Rio do Vento	2616	2867	3308
Fernando Pedroza	2941	2650	2854
Jardim de Angicos	2439	2670	2607
Lajes	8687	9399	10381
Pedra Preta	2710	2847	2590
Pedro Avelino	11447	8006	7171
Total	**53108**	**50932**	**51304**

Fonte: Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil e IBGE

Como pode-se observar pela Tabela 1, 6 municípios da microrregião de Angicos apresentaram crescimento e 2 apresentaram decrescimento entre 1991 e 2000. Os dois grupos de municípios, divididos pelo seu sentido de crescimento, são apresentados na Tabela 2.

Considerando que o método AiBi é aplicado, muitas vezes, sem se ter conhecimento da população futura, decidiu-se estimar a população de 2010 por algum método de projeção. Por sua simplicidade, escolheu-se extrapolar até 2010 a população da microrregião utilizando a taxa de crescimento instantânea[1] observada entre 1991 e 2000. Assumiu-se que os municípios que apresentaram crescimento populacional entre 1991 e 2000, também apresentarão crescimento entre 2000 e 2010, e o inverso acontece para aqueles que decresceram. Para estimar a população total da microrregião de Angicos,

---

[1] Taxa de crescimento = $r = \frac{\ln\left(\frac{P\,(T)}{P(0)}\right)}{(T-0)} = \frac{\ln\left(\frac{P\,(2000)}{P(1991)}\right)}{9}$. Dessa forma, $P(T) = P(0) * e^{rT}$.

projetamos, por meio da taxa de crescimento exponencial, a população total dos municípios que cresceram entre 1991 e 2000 e somamos com a projeção da população total dos municípios que decresceram entre 1991 e 2000. Os cálculos realizados são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 - População observada por município, microrregião Angicos – RN, 1991, 2000 e 2010.

	Municípios	População observada		Taxa de crescimento 1991 a 2000	População estimada
		1991	2000		2010
Creseram	Afonso Bezerra	10733	10867		
	Angicos	11535	11626		
	Caiçara do Rio do Vento	2616	2867		
	Jardim de Angicos	2439	2670		
	Lajes	8687	9399		
	Pedra Preta	2710	2847		
	Total	38720	40276	0,00438	42078
Decres-ceram	Fernando Pedroza	2941	2650		
	Pedro Avelino	11447	8006		
	Total	14388	10656	-0,03336	7633
	População total				49711

Fonte: Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil e IBGE

Estimação dos coeficientes.

Para estimar os valores de ai e bi, recorre-se às equações 3 e 4.

Os coeficientes para cada município foram calculados seguindo os mesmos passos descritos abaixo para o cálculo dos coeficientes do município de Lages:

$$a_i = \frac{P_i(t_1) - P_i(t_0)}{P(t_1) - P(t_0)}$$

$$a_{Lages} = \frac{P_{Lages}(2000) - P_{Lages}(1991)}{P(2000) - P(1991)} = \frac{9.399 - 8.687}{50.932 - 53.108} = -0,33$$

$$b_i = P_i(t_0) - a_i P(t_0)$$

$$b_{Lages} = P_{Lages}(1991) - a_{Lages} P(1991) = 8.687 - (-0,33) \cdot 49.711 = 26.064$$

Os resultados para os demais municípios estão apresentados nas Tabelas 3 e 4.

Estimação da população das áreas menores na data desejada.

Para estimar a população no momento desejado, recorre-se à equação 2.

Para o município de Lages:

$$P_i(t) = a_i P(t) + b_i$$
$$P_{Lages}(2010) = a_{Lages} P(2010) + b_{Lages}$$
$$P_{Lages}(2010) = 0{,}458 \cdot 42078 - 9031$$
$$P_{Lages}(2010) = 10224$$

As populações dos demais municípios também são estimadas por essa relação. Os resultados são apresentados nas Tabelas 3 e 4.

Tabela 3 - Aplicação do Método AiBi para a estimação da população por município que cresce da microrregião de Angicos – RN, 2010.

Região	População Recenseada		a	b	Pop 2010
	1991	2000			
Afonso Bezerra - RN	10.733	10.867	0,086	7.399	11.022
Angicos - RN	11.535	11.626	0,058	9.271	11.731
Caiçara do Rio do Vento - RN	2.616	2.867	0,161	-3.630	3.158
Jardim de Angicos - RN	2.439	2.670	0,148	-3.309	2.938
Lajes - RN	8.687	9.399	0,458	-9.031	10.224
Pedra Preta - RN	2.710	2.847	0,088	-699	3.006
Total	**38.720**	**40.276**			**42.078**

Fonte dos dados básicos: Atlas do Desenvolvimento Humano do Brasil

Tabela 4 - Aplicação do Método AiBi para a estimação da população por município que decresce da microrregião de Angicos – RN, 2010.

Região	População Recenseada		a	b	Pop 2010
	1991	2000			
Fernando Pedroza - RN	2.941	2.650	0,078	1.819	2.414
Pedro Avelino - RN	11.447	8.006	0,922	-1.819	5.219
Total	**14388**	**10656**			**7633**

Fonte dos dados básicos: Atlas do Desenvolvimento Humano do Brasil

Os resultados de ambas as tabelas evidenciam que a direção do crescimento populacional foi mantida para todos os municípios o que corrobora o pressuposto do método.

3. Transformações na função linear e função logística: estimativa de Φi

O método linear (AiBi) apresenta algumas limitações. Entre elas, a impossibilidade de lidar com casos reais em que alguma área menor cresce enquanto a maior decresce, ou vice versa. Diante disso, surgiram alguns métodos, derivados do método AiBi, que procuram sanar essas dificuldades encontradas no uso do método linear.

Pelo método AiBi,

$$P_i(t) = b_i + a_i P(t)$$

Dividindo a equação por P(t), temos.

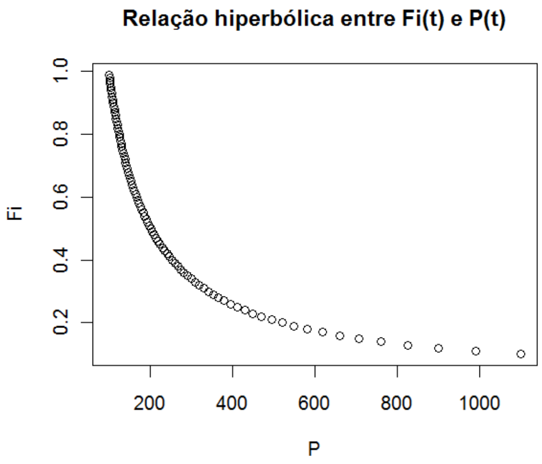
$$\frac{P_i(t)}{P(t)} = \frac{b_i + a_i P(t)}{P_T(t)}$$

$$\phi_i = a_i + b_i / P(t)$$

$$\Phi_i = a_i + b_i / P(t) \qquad (8)$$

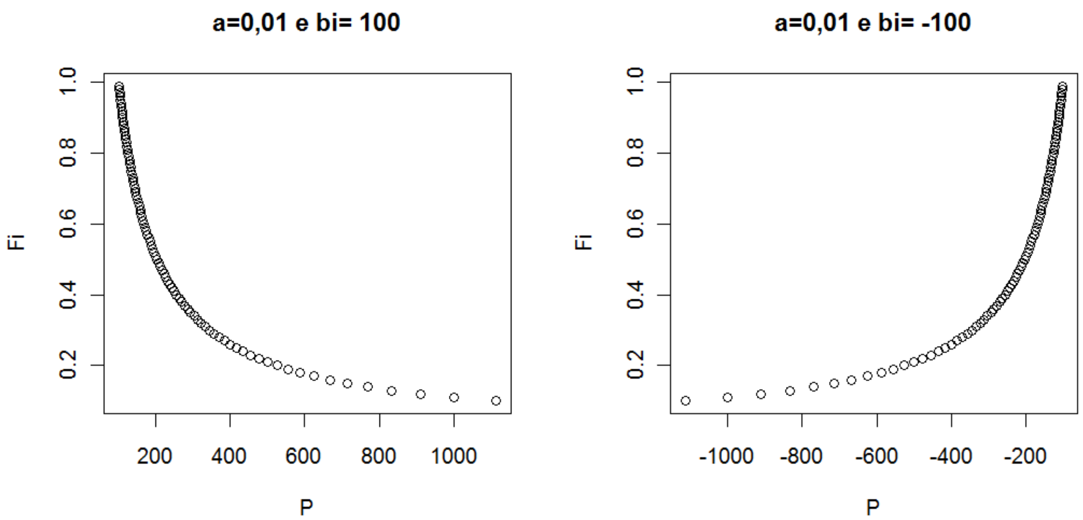
Assim, a relação entre Pi(t) e P(t) muda, deixa de apresentar uma relação linear e assume uma relação hiperbólica, como apresentado na Figura 2. Por essa transformação, não mais modelamos Pi(t) e sim Φi, que é a relação entre a população menor e a população maior em um dado momento no tempo (FRIAS, 1987). Cabe ressaltar que Φi é a relação entre a área menor e a maior, por isso pode assumir valores apenas entre 0< Φi<1.

Figura 2 – Relação entre Φi e P(t).



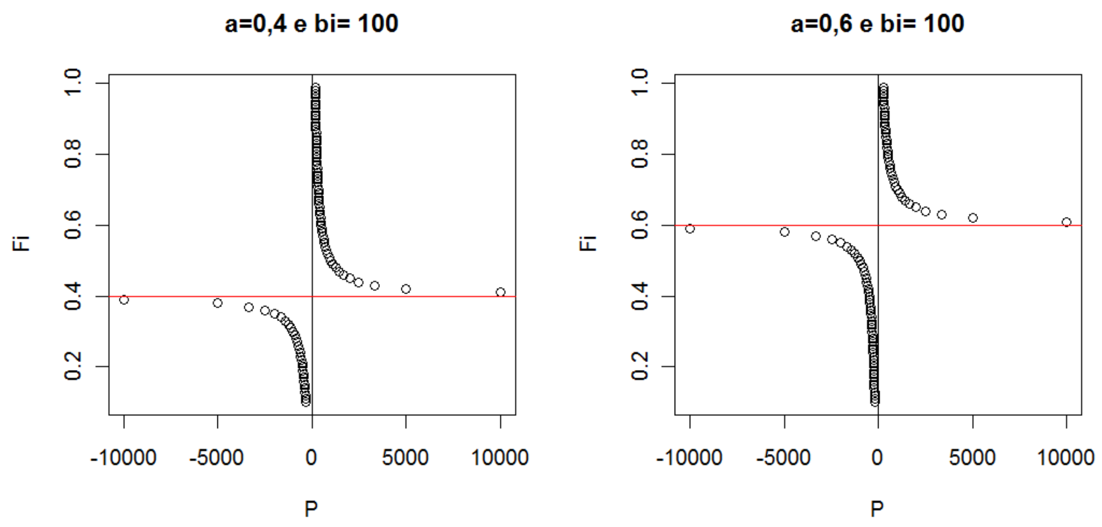
A interpretação dos coeficientes a_i e de b_i também mudam com a manipulação algébrica. O sinal de b_i indica a concavidade da hipérbole que dá a relação entre Pi(t) e P(t), como mostra a Figura 3. De acordo com o gráfico, percebe-se que quando b_i é positivo a hipérbole é côncava e Φi(t) está relacionado a P(t) de forma decrescente (P(t) aumenta e Φi(t) diminui). Por outro lado, se b_i assume valores negativos, a hipérbole passa a ser convexa e a relação entre Φi(t) e P(t) é positiva (P(t) aumenta Φi(t) também aumenta). A possibilidade de ter relações positivas e negativas em um mesmo método é a principal vantagem de modelar Φi(t) em vez de modelar Pi(t), como no método AiBi.

Figura 3 – Efeito do sinal de bi na concavidade da hipérbole.



O Coeficiente a_i, quando se modela Φi, passa a ser o limite da participação relativa Φi quando. A Figura 4 esclarece essa relação. Com o aumento do valor de P(t) (P(t) tendendo ao infinito), o valor de Φi tende a um valor limite, dado por a_i. Valores de Φi menores que a_i não seriam possíveis pois requerem P(t) negativo, o que é impossível já que P(t) representa o tamanho de uma população. Dessa forma, apenas o primeiro quadrante da Figura 4 representa uma situação possível nesse método.

Figura 4 – Relação entre ai e Fi.



Φi(t) está relacionado a P(t) por uma função hiperbólica que muda de acordo com os valores dos parâmetros. Portanto, deseja-se conhecer o comportamento de Φi(t) segundo o valor de P(t) para cada conjunto de possibilidades de valores de parâmetros. São 4 as combinações possíveis de valores de a_i e b_i:

a) ai>0 e bi>0;
b) ai>0 e bi<0
c) ai<0 e bi>0
d) ai<0 e bi<0

Para cada uma dessas combinações será analisado o comportamento da função Φi(t) quando P(t) tende a 0 e quando tende a infinito buscando determinar os limites possíveis para os valores de Φi(t).

a) $a_i>0$ e $b_i>0$.

i) Se P(t) tende a 0,

$$\lim_{P(t)\to 0} \phi_i = \lim_{P(t)\to 0} a_i + b_i / P(t) = ai + \infty = \infty$$

Mas, 0< Φi<1. Portanto, o limite superior de Φi só pode ser 1.

ii) Se P(t) tende a infinito,

Portanto, o limite inferior de Φi é ai.

b) $a_i>0$ e $b_i<0$

i) Se P(t) tende a 0,

Mas, 0< Φi<1.

Portanto, o limite inferior de Φi só pode ser 0.

ii) Se P(t) tende a infinito,

$$\lim_{P(t)\to \infty} \phi_i = \lim_{P(t)\to \infty} a_i + b_i / P(t) = a_i + 0 = a_i$$

Portanto, o limite superior de Φi é ai.

c) $a_i<0$ e $b_i>0$

i) Se P(t) tende a 0,

$$\lim_{P(t)\to 0} \phi_i = \lim_{P(t)\to 0} a_i + b_i / P(t) = ai + \infty = +\infty$$

Mas, 0< Φi<1.

Portanto, o limite superior de Φi só pode ser 1.

ii) Se P(t) tende a infinito,

Mas, nesse caso, ai<0. Portanto, o limite inferior de Φi é 0.

d) $a_i<0$ e $b_i<0$.

i) Se P(t) tende a 0,

$$\lim_{P(t)\to 0} \phi_i = \lim_{P(t)\to 0} a_i + b_i / P(t) = ai - \infty = -\infty$$

Mas, 0< Φi<1.

Portanto, o limite inferior de Φi só pode ser 0.

ii) Se P(t) tende a infinito,

$$\lim_{P(t)\to \infty} \phi_i = \lim_{P(t)\to \infty} a_i + b_i / P(t) = a_i + 0 = a_i$$

Mas, nesse caso, ai<0. Portanto, o limite inferior de Φi é 0.

Para $a_i < 0$ e $b_i < 0$ o valor de Φi só pode ser 0, para qualquer valor de P(t), pois os limites superiores e inferiores encontrados nesse casos são iguais a 0. Essa situação não tem sentido prático. Portanto, $a_i < 0$ e $b_i < 0$ simultaneamente é uma impossibilidade do método.

A Tabela 5 apresenta de forma resumida os limites de Φi encontrados.

Tabela 5 – Limites de Φi para cada combinação de valores de ai e bi.

ai	bi	Φi	
		Limite Inferior (L_1)	Limite Superior (L_2)
> 0	< 0	0	ai
> 0	> 0	ai	1
< 0	< 0	0	0
< 0	> 0	0	1

Uma vez encontrados limites para Φi, deve-se pensar em uma função que modele Φi em relação a P(t) respeitando os limites encontrados. Essa função pode ser a função logística (FRIAS, 1987). Por essa função, Φi e P(t) são relacionados de forma que Φi parta de um valor limite previamente estabelecido e tenda a um outro valor limite, como descrito na Tabela 5.

A modelagem pela curva logística, pode ser descrita da seguinte forma:

$$\Phi_i(t) = L_1 + \frac{L_2 - L_1}{1 + \exp\{\alpha + \beta(t_1 - t_0)\}} \qquad (9)$$

$$\alpha = \ln\left(\frac{L_2 - \Phi_i(0)}{\Phi_i(0) - L_1}\right) \qquad (10)$$

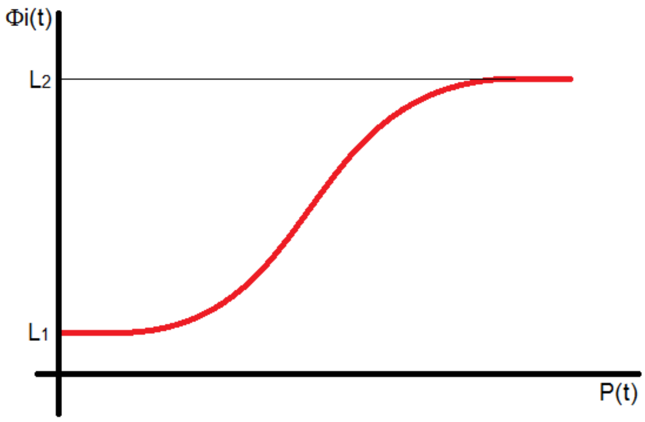
$$\beta = \frac{1}{t_1 - t_0}\left(\ln\left(\frac{L_2 - \Phi_i(t_1)}{\Phi_i(t_1) - L_1}\right) - \alpha\right) \qquad (11)$$

Onde,

L_1 é o limite inferior e L_2 é o limite inferior para Φi(t).

A Figura 5 apresenta uma como seria uma relação logística entre Φi e P(t).

Figura 5 -Relação logística entre Φi e P(t).



Para a modelagem logística deve-se, primeiramente, encontrar os valores de a_i e b_i definidos pelas equações 3 e 4. A partir dos valores de a_i e b_i determina-se, para cada área menor, quais são os limites de Φi. Definidos os limites de Φ, pode-se encontrar a função logística de interesse e, a partir dela, determinar Φi(t) para cada período de interesse.

O percentual Φi é então aplicado à projeção da população total para se estimar o tamanho da população de cada subárea no momento desejado.

$$P_i(t) = P(t) \cdot \Phi_i(t) \; (12)$$

3.1 Aplicação do método

Por meio do método logístico, também estimou-se as populações dos 8 municípios (Afonso Bezerra, Angicos, Caiçara do Rio do Vento, Fernando Pedroza, Jardim de Angicos, Lajes, Pedra Preta, Pedro Avelino) que compõem a microrregião de Angicos do RN. Usou-se a mesma população total estimada anteriormente (Exemplo do AiBi) pela taxa de crescimento exponencial para microrregião de Angicos, em 2010.

Estimação dos coeficientes a_i e b_i.

Para estimar os valores de a_i e b_i, também recorre-se às equações 3 e 4 do método AiBi. Tais coeficientes são apresentados na Tabela 6.

Estimação dos limites inferiores e superiores para cada área menor.

Os limites devem ser fixados segundo a tabela 4, de acordo com os valores de a_i e b_i encontrados nas tabelas 2 e 3.

Para o município de Lages, por exemplo, $a_i<0$ e $b_i>0$. Portanto, o limite inferior L1 de Φi deve ser 0 e o limite superior L2 deve ser 1. Já o município de Fernando Pedroza apresenta $a_i>0$ e $b_i<0$, portanto, o limite inferior de Φi deve ser 0 e o limite superior deve ser a_i, conforme a Tabela 5. Os valores de limites superiores e inferiores de Φi para os demais municípios são apresentados na Tabela 6.

É importante destacar que, o limite superior de Φi deve ser no máximo 1. Para o município de Pedro Avelino, segundo a Tabela 5, o limite superior deveria ser a_i. Contudo, a_i é maior que 1, nesse caso. Portanto, o limite superior de Φi nesse caso deve ser 1, como mostra a Tabela 6.

Estimação dos valores de alfa e beta.

Alfa e beta são estimados pelas equações 10 e 11. Para o município de Lages,

$$\alpha = \ln\left(\frac{L_2 - \Phi_i(0)}{\Phi_i(0) - L_1}\right) = \ln\left(\frac{1-0{,}16}{0{,}16-0}\right) = 1{,}63$$

$$\beta = \frac{1}{t_1 - t_0}\left(\ln\left(\frac{L_2 - \Phi_i(t_1)}{\Phi_i(t_1) - L_1}\right) - \alpha\right) = \frac{1}{2000-1991}\left(\ln\left(\frac{1-0{,}18}{0{,}18-0}\right) - 1{,}63\right) = -0{,}01$$

Os valores de alfa e beta para os demais municípios são apresentados na Tabela 6.

Estimação da população das áreas menores na data desejada.

Pela equação 9, estimamos de de Φi(t) para Lages:

$$\Phi_i(t) = L_1 + \frac{L_2}{1+e^{\alpha+\beta t}} = 0 + \frac{1}{1+e^{1,63-0,01*10}} = 0,1845$$

Como o somatório de todos os Φi(t) é igual a unidade, não é necessário ajustá-los. Os valores dos demais Φi(t) são apresentados na tabela 6.

Portanto, para estimar a população total cada município, utilizamos a equação 12. Para Lages temos:

$$P_i(t) = P(t) \cdot \Phi_i(t) = 49.711 * 0,1845 = 9.174$$

Para as populações dos demais municípios, o mesmo procedimento é realizado e os resultados estão apresentados na tabela 6 .

Tabela 6 - Aplicação do Método Logístico para a estimação da população por município da microrregião de Angicos – RN, 2010.

Região	População Recenseada		a	b	Fi(1991)	Fi(2000)
	1991	2000				
Afonso Bezerra	10733	10867	-0,06	14003	0,20	0,21
Angicos	11535	11626	-0,04	13756	0,22	0,23
Caiçara do Rio do Vento	2616	2867	-0,12	8742	0,05	0,06
Fernando Pedroza	2941	2650	0,13	-4161	0,06	0,05
Jardim de Angicos	2439	2670	-0,11	8077	0,05	0,05
Lajes	8687	9399	-0,33	26064	0,16	0,18
Pedra Preta	2710	2847	-0,06	6054	0,05	0,06
Pedro Avelino	11447	8006	1,58	-72535	0,22	0,16
total	**53108**	**50932**			**1,00**	**1,00**

Região	Limite Inferior	Limite Superior	Alfa	Beta	Fi(2010)	Pi(2010)
Afonso Bezerra	0,00	1,00	1,37	-0,007	0,2134	10.607
Angicos	0,00	1,00	1,28	-0,006	0,2283	11.347
Caiçara do Rio do Vento	0,00	1,00	2,96	-0,014	0,0563	2.798
Fernando Pedroza	0,00	0,13	0,35	0,010	0,0520	2.586
Jardim de Angicos	0,00	1,00	3,03	-0,014	0,0524	2.606
Lajes	0,00	1,00	1,63	-0,015	0,1845	9.174
Pedra Preta	0,00	1,00	2,92	-0,010	0,0559	2.779
Pedro Avelino	0,00	1,00	1,29	0,039	0,1572	7.814
total					**1,0000**	**49.711**

Fonte dos dados básicos: Atlas do Desenvolvimento Humano do Brasil

4. Comparação dos Métodos

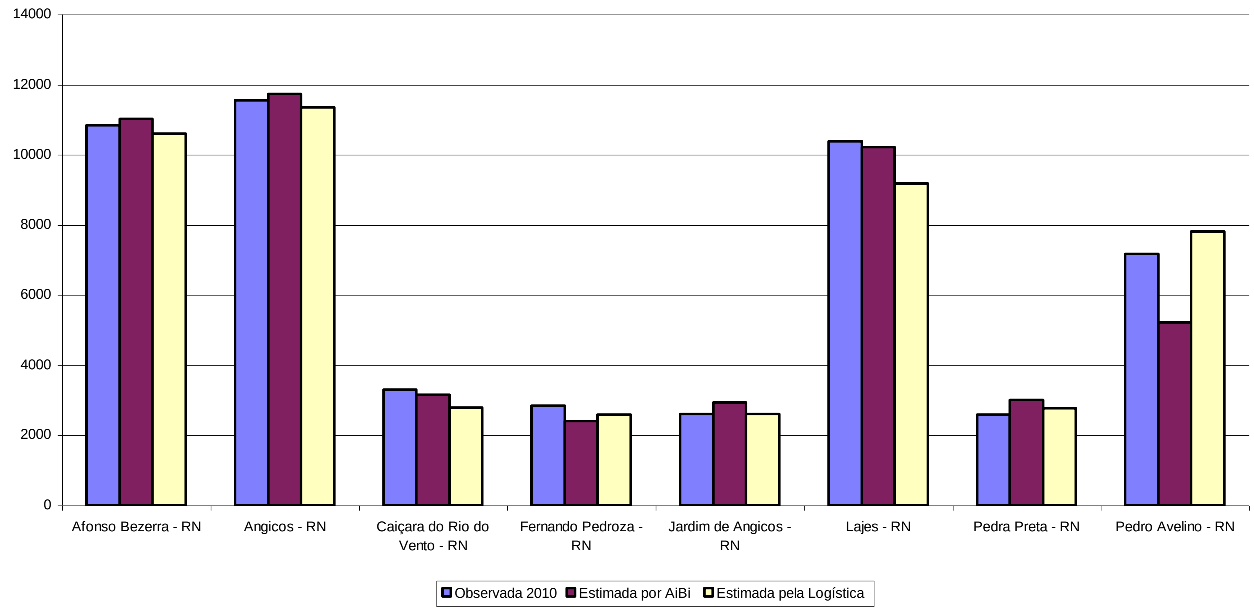
Com o objetivo de avaliar a consistência do método AiBi e o Logístico, comparamos as populações estimadas por ambos os métodos com as populações observadas em 2010. Inicialmente, comparamos as estimativas por cada método com a população observada em 2010, analisando cada município, conforme a Tabela 7 e a Figura 6 demonstram. Os resultados evidenciam que nos municípios Afonso Bezerra, Angicos, Caiçara do Rio do Vento e Lages, o método AiBi apresentou estimativas mais próximas das populações observadas, ao passo que para os municípios Fernando Pedroza., Jardim Angicos Pedra Petra e Pedro Avelino o método logístico foi mais adequado. Portanto, se compararmos apenas as quantidades de municípios que cada método apresentou melhores estimativas, tem-se um equilíbrio para a microrregião de Angicos – RN.

Tabela 7 - População observada de cada município da microrregião de Angicos – RN em 2010, população estimada pelo método Ai Bi e pelo método Logístico, para cada município dessa microrregião.

Município	Observada 2010	Estimada por AiBi	Estimada pela Logística
Afonso Bezerra - RN	10844	11022	10607
Angicos - RN	11549	11731	11347
Caiçara do Rio do Vento - RN	3308	3158	2798
Fernando Pedroza - RN	2854	2414	2586
Jardim de Angicos - RN	2607	2938	2606
Lajes - RN	10381	10224	9174
Pedra Preta - RN	2590	3006	2779
Pedro Avelino - RN	7171	5219	7814
Total	51304	49711	49711

Fonte dos dados básicos: Atlas do Desenvolvimento Humano do Brasil e Censo Demográfico, 2010

Figura 6 – Comparação das populações estimadas por município versus populações observadas 2010, microrregião de Angicos – RN



Fonte dos dados básicos: Atlas do Desenvolvimento Humano do Brasil e Censo Demográfico, 2010

Porém, precisamos de uma medida resumo que possa quantificar o quanto um método é mais adequado do que o outro. Nesse sentido, utilizamos uma medida sintética de variabilidade que resume, em apenas um valor numérico, qual o desvio dos valores estimados em relação aos observados. Essa medida é a soma do quadrado dos erros, como na equação 13.

$$SQE = \sum_{i=1}^{n} (P_i(2010) - P_i(2010)_{obs})^2 \qquad (13)$$

Onde $P_i(2010)_{obs}$ representa a população do município i observada em 2010.

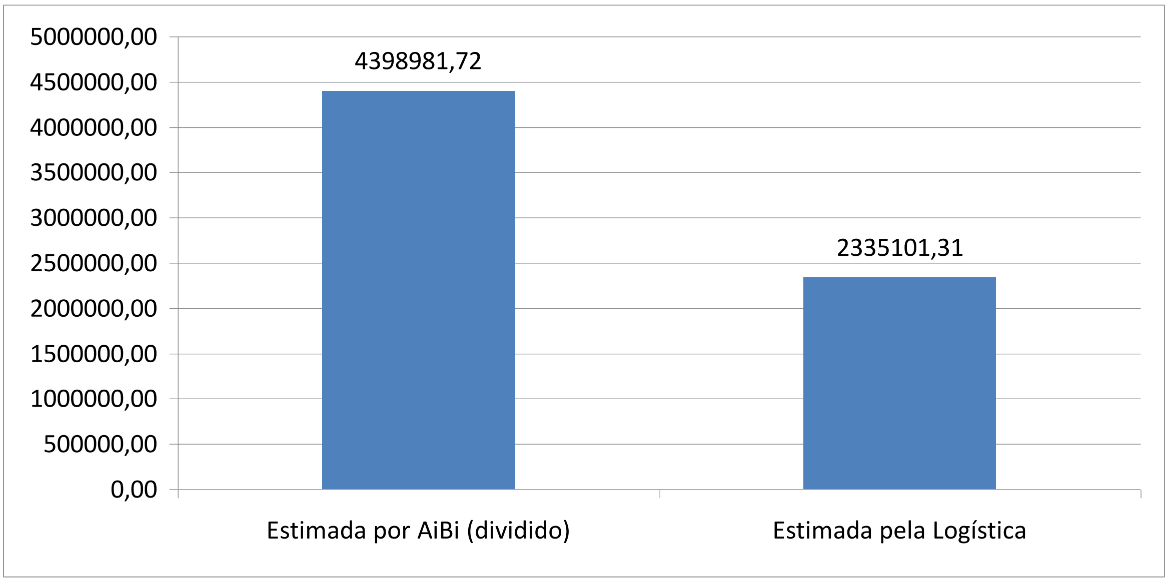
A Tabela 8 apresenta os resultados da Soma do quadrado dos erros.

município	**Estimada por AiBi (dividido)**	**Estimada pela Logística**
Afonso Bezerra - RN	31760,18	56374,45
Angicos - RN	33272,10	40651,78
Caiçara do Rio do Vento - RN	22579,15	259803,34
Fernando Pedroza - RN	193346,57	71560,83
Jardim de Angicos - RN	109276,62	0,98
Lajes - RN	24737,51	1457456,66
Pedra Preta - RN	172797,17	35634,20
Pedro Avelino - RN	3811212,42	413619,08
Soma do quadrado dos erros	4398981,72	2335101,31

Fonte dos dados básicos: Atlas do Desenvolvimento Humano do Brasil e Censo Demográfico, 2010

Observando a Figura 7, percebe-se que a soma do quadrado dos erros do método AiBi é 1,88 vezes maior do que o valor dessa medida sintética para o método Logístico. De acordo com esses resultados pode-se afirmar que, para a microrregião de Angicos – RN, o método Logístico apresentou melhores resultados.

Figura 7 - Soma do Quadrado dos erros, microrregião de Angicos - RN



Fonte dos dados básicos: Atlas do Desenvolvimento Humano do Brasil e Censo Demográfico, 2010

5. Conclusão

O presente artigo buscou descrever de forma clara e detalhada o método da tendência de crescimento AiBi e o método logístico da participação da população da subárea na população regional. Na aplicação dos métodos, para a população da microrregião de Angicos, no Rio Grande do Norte, verificamos que ambos foram eficientes para redistribuir a população da área maior entre as áreas menores. No entanto, ao comparar as populações estimadas com as observadas por meio da soma do quadrado dos erros, o método Logístico apresentou um melhor resultado. Cabe ressaltar que este é um resultado que pode não se repetir para outras populações, uma vez que, dependendo do comportamento demográfico das pequenas áreas, um modelo matemático pode não ser suficiente para a projeção de tais populações. O pesquisador deve ter cautela e sensibilidade ao avaliar suas projeções, principalmente quando a população é consideravelmente pequena, visto que a aplicação de tais métodos matemáticos pode produzir resultados inadequados.

6. Referências:

ATLAS DE DESENVOLVIMENTO HUMANO NO BRASIL. Rio de Janeiro, PNUD, IPEA, Fundação João Pinheiro, 2003.

FRIAS, Luiz Armando de M. Projeções da população residente e do número de domicílios particulares ocupados por situação urbana e rural, segundo as unidades da Federação no período 1985-2020 In: WONG, Laura R; HAKKERT, Ralph; LIMA, Ricardo(Org) Futuro da população brasileira: projeções, previsões e técnicas Embu, São Paulo: ABEP, p148-172, 1987.

IBGE, Censo Demográfico 2010. Disponível em <http://www.ibge.gov.br/home/>, acesso dia 03 de junho de 2011.

WALDVOGEL, B.C. Técnicas de projeção populacional para o planejamento regional. Belo Horizonte, CEDEPLAR, 1998.